

Penggunaan Flow Proof pada Perkuliahan Analisis Real untuk Meningkatkan Kemampuan Mahasiswa dalam Menganalisis Pembuktian

Helma

Staf Pengajar Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Padang
helma667@yahoo.co.id

ABSTRACT

Real Analysis is the subjects to help the students in critical thought. Students must have the definitions and theorems to solve the problems and perform a process which is often called the preliminary analysis. After that, students construct the proof based on the preliminary analysis. Based on the characteristics of the problem in Real Analysis, the solution given to the problem is using flow proof in composing preliminary analysis. The research shows that the student's ability in analyzing can be improved by using flow proof

Keywords : Analyze, flow proof, real analysis



This is an open access article distributed under the Creative Commons 4.0 Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. ©2018 by author and Universitas Negeri Padang.

PENDAHULUAN

Permasalahan dalam matematika sering memerlukan pembuktian. Pembuktian adalah suatu cara untuk menegaskan bahwa suatu konsep matematika itu benar adanya. Hal ini merupakan argumen logis yang membuktikan kebenaran sebuah pernyataan. Setiap pernyataan dalam bukti harus disajikan dengan jelas dan didukung oleh definisi, dalil, teorema, atau proposisi. (MathBitsNotebook, 2018).

Analisis Real merupakan salah satu mata kuliah yang diperlukan untuk calon sarjana matematika maupun pendidikan matematika. Kompetensi yang diharapkan adalah mahasiswa mampu menganalisis dan berpikir kritis dalam menyelesaikan suatu persoalan, serta menukiskan penyelesaiannya dalam runtutan pernyataan yang logis (Bartle, 2011). Mahasiswa dapat menafsirkan secara nalar serta mengkomunikasikan pemahamannya, dapat membuat kaitan antar definisi/teorema dan menggunakannya untuk menyelesaikan persoalan matematika.

Materi Analisis Real berisikan tentang definisi-definisi dan teorema-teorema yang harus dibuktikan secara analisis. Adapun contoh soalnya adalah

*Let S be a nonempty bounded set in R .
Let $a < 0$, and $aS = \{ ax : x \in S \}$.
Prove that $\sup (aS) = a \inf S$*

Mahasiswa harus memahami definisi supremum dan infimum dari suatu himpunan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut.

Mahasiswa diminta melakukan suatu proses analisa berpikir yang sering disebut dengan analisis pendahuluan. Setelah dilakukan analisis pendahuluan, mereka mengkonstruksi bukti berdasarkan analisis pendahuluan (Helma, 2002).

Mahasiswa sering mengalami kesulitan ketika melakukan analisis pendahuluan. Kesulitan tersebut adalah menelaah pembuktian dari suatu permasalahan, menstrukturkan pola pikir secara logis dalam melakukan penalaran pembuktian, dan melihat hubungan antar definisi, teorema, serta hirarkhis keterurutannya (Mukhni & Helma, 2008). Kesulitan mahasiswa dalam melakukan analisis pendahuluan akan mempengaruhi kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi suatu pembuktian yang merupakan jawaban dari permasalahan yang diberikan. Sehingga, apabila diberikan suatu permasalahan pembuktian, mahasiswa menyelesaikan berdasarkan hafalan.

Mahasiswa terkendala dalam memberikan alasan dari setiap pernyataan yang diberikan. Mereka mengerti dengan prosedur bukti, tetapi tidak memahami langkah pembuktian. Akibatnya, mereka mengalami kesulitan ketika memulai penyelesaian dari suatu pembuktian, yaitu mengaitkan pernyataan yang diberikan dengan alasan logis dari pernyataan tersebut.

Pembuktian dari suatu persoalan yang disajikan dalam buku-buku Analisis Real kurang memberikan penjelasan proses penalarannya (Helma & Subhan, 2010). Mahasiswa merasa kesulitan ketika membaca buku-buku tersebut. Hal ini berakibat kurang bermaknanya

pembelajaran yang dilaksanakan. Akibatnya, minat dan hasil belajar mahasiswa dalam mempelajari Analisis Real menjadi rendah.

Terdapat tiga cara yang berbeda untuk menyajikan pembuktian (WyZant, 2018), yaitu *paragraph proof*, *two-column proof*, dan *flow proof*. *Paragraph proof* disajikan dalam bentuk narasi kalimat seperti layaknya sebuah paragraf. Umumnya, buku-buku menggunakan cara ini untuk menyajikan pembuktian. *Two-column proof* merupakan pembuktian yang terdiri dari dua kolom, di mana kolom pertama berisi daftar kronologis dari langkah-langkah pembuktian yang digunakan, yang disebut *Statements*, yang mengarah ke kesimpulan yang diinginkan. Kolom kedua berisi pembenaran, disebut *Reasons*, untuk mendukung setiap langkah dalam pembuktian. *Reasons* dapat berupa definisi, postulat, teorema. *Flow proof* disajikan dalam bentuk *flowchart*.

Flow proof memiliki tiga unsur, yaitu pernyataan, keyakinan, dan argumen. Pernyataan adalah penegasan tentang sesuatu hal atau realitas yang dinyatakan dalam bentuk kalimat atau ungkapan. Argumen merupakan bukti rasional akan kebenaran suatu pernyataan. Keyakinan adalah ketersediaan untuk menerima bahwa suatu urutan pernyataan adalah benar berdasarkan definisi atau teorema. Dalam hal ini, tidaklah mudah dalam menyusun suatu pembuktian jika mahasiswa tidak mengerti urutan pola pikir dan keterkaitan antar konsep secara logis. Menurut Halen (2007), *Flow Proof* 1) *associative, simplicity, ease of use*, 2) *any idea probably has many links*, 3) *visual, easy to remember*, 4) *radial, allows you to work in all directions*, and 5) *overview, helps to see the big picture and relationships between issues*.

Beberapa penelitian tentang penggunaan *Flow Proof* untuk pembuktian, yaitu 1) penelitian Cirillo dan Herbst (2012). Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketika siswa diberikan suatu masalah dalam Geometri dan siswa diminta untuk menuliskan premis serta pernyataan yang akan dibuktikan, begitu juga dengan membangun diagram *Flow Proof* dan *Two-Column Proof*, terlihat bahwa siswa dapat menyelesaikan pembuktian, 2) penelitian Miyazaki, Fujita, Jones, dan Iwanaga (2017). Hasil penelitian menunjukkan bahwa penggunaan *Flow Proof* pada pelajaran Geometry dapat mengatasi kesulitan siswa dalam melakukan pembuktian, dan 3) penelitian Miyazaki, Fujita, dan Jones (2015). Hasil penelitian menunjukkan

bahwa penggunaan *Flow Proof* dengan problem terbuka mendorong perkembangan siswa terhadap pemahaman struktur bukti dengan memberikan berbagai hubungan asumsi dengan kesimpulannya.

Berdasarkan permasalahan yang terdapat pada perkuliahan Analisis Real, solusi yang dapat digunakan adalah penggunaan *flow proof* dalam melakukan analisis pendahuluan. Hal ini mampu mengatasi masalah dengan alasan bahwa dengan menggunakan *flow proof* akan membantu mahasiswa dalam melatih berpikir kritis yang digunakan dalam proses deduktif dan menstrukturkan pola pikir secara logis. Sehingga, tujuan penelitian ini adalah untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam menganalisis pembuktian pada perkuliahan Analisis Real dengan menggunakan *flow proof*.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah *quasy experiment*. Disain yang digunakan merupakan *one shot case study* (Sukmadinata dan Syaodih, 2006), dengan subjek penelitian terdiri dari mahasiswa Program Studi Matematika, FMIPA UNP. Jumlah mahasiswa yang terlibat sebanyak 60 orang.

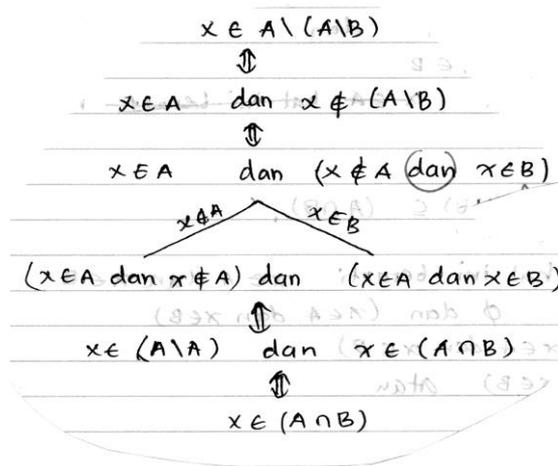
Adapun langkah-langkah pelaksanaan perkuliahan adalah 1) dosen menjelaskan setiap topik baru, 2) dosen memberikan latihan untuk dikerjakan, 3) sementara mahasiswa mengerjakan latihan, dosen berkeliling untuk memeriksa pekerjaan mahasiswa. Dalam mengerjakan latihan, mereka disuruh untuk membandingkan dan mendiskusikan jawabannya dengan teman di sebelahnya, dan 4) dosen mendiskusikan jawaban latihan tersebut.

Pada penelitian ini digunakan *flow proof* yang disesuaikan dengan karakteristik penggunaan dalam Analisis Real. *Flow proof* dibuat terurut secara logis menurut prosedur pemikiran. Urutan prosedur pemikiran tersebut ditujukan untuk menyelesaikan permasalahan yang diberikan. Adapun ketentuan-ketentuan hubungannya adalah 1) lambang \Rightarrow , menunjukkan hubungan implikasi. Hubungan tersebut menunjukkan suatu kaitan sebab akibat yang hanya berlaku satu arah. Hal ini dapat dikenali melalui suatu teorema, lemma, corollary, atau argumentasi logika. Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai "jika ... maka ...", 2) lambang \Leftrightarrow , menunjukkan hubungan bi implikasi. Hubungan tersebut menunjukkan

suatu kaitan sebab akibat yang berlaku dua arah. Hal ini dapat dikenali melalui suatu definisi, teorema, atau lemma. Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai "... jika dan hanya jika ...", dan 3) lambang \rightarrow , menunjukkan hubungan alternatif. Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai "... atau ...". Untuk mencapai tujuan penelitian yang telah ditetapkan, digunakan alat pengumpul data berupa lembaran tes hasil belajar dan lembaran angket.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Selam perkuliahan, diperkenalkan kepada mahasiswa cara membangun *flow proof* dari suatu persoalan. Adapun salah satu contoh *flow proof* yang dibuat oleh mahasiswa dapat dilihat pada Gambar 1 .

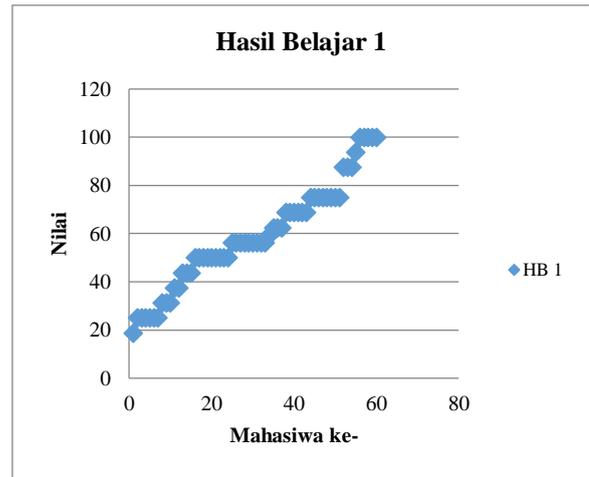


Gambar 1. Contoh Flow Proof

Pada *flow proof* terlihat bahwa mahasiswa mengalami kesalahan dalam memberikan argu men. Akibatnya, pernyataan pada langkah berikutnya akan menjadi salah.

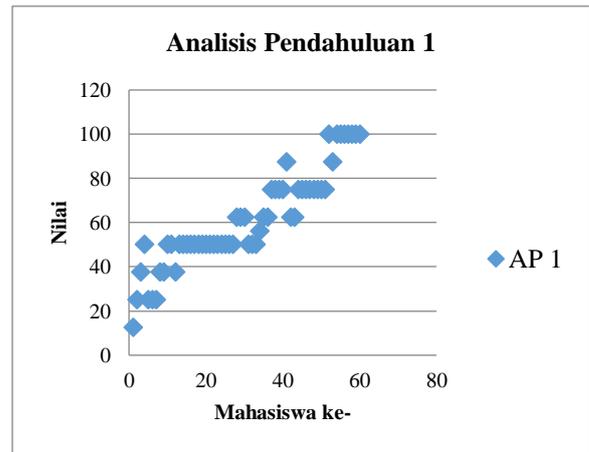
Setelah dilakukan perkuliahan, maka diberikan tes hasil belajar. Tes hasil belajar diberikan dua kali selama penelitian. Adapun nilai yang diperoleh mahasiswa pada tes hasil belajar pertama dapat dilihat pada Gambar 2.

Nilai tes hasil belajar pertama yang dicapai oleh mahasiswa belum memuaskan. Nilai rata-rata yang diperoleh 59,01 dengan simpangan baku 21,78. Disamping itu, lebih dari 30% dari jumlah mahasiswa mendapat nilai kurang atau sama dengan 50. Hal ini berarti, lebih dari 30% dari mahasiswa mendapat nilai D dan E.



Gambar 2. Hasil Belajar 1

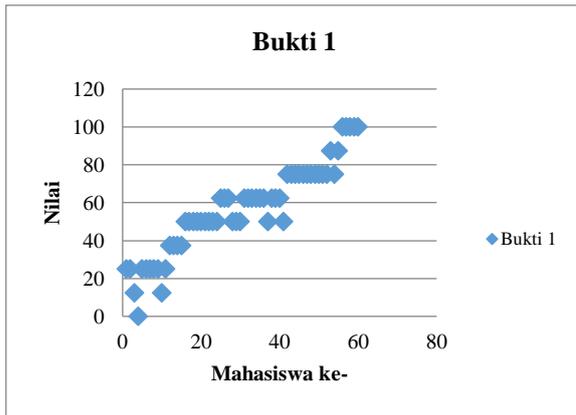
Hasil belajar yang dicapai oleh mahasiswa di atas dipengaruhi oleh kemampuan mereka dalam melakukan analisis pendahuluan dan menyusun pembuktian pada setiap persoalan yang diberikan. Adapun kemampuan mahasiswa dalam melakukan analisis pendahuluan pada tes hasil belajar dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Analisis Pendahuluan 1

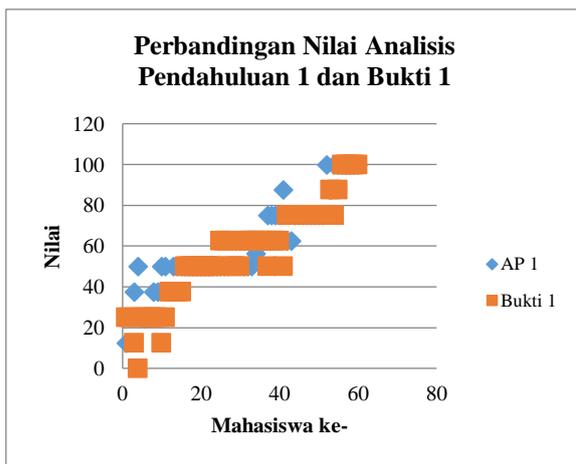
Kemampuan mahasiswa dalam menyusun pembuktian dipengaruhi oleh analisis pendahuluan yang mereka lakukan terhadap suatu persoalan. Tetapi, ada beberapa mahasiswa yang menyusun pembuktian tidak berdasarkan analisis pendahuluan yang mereka lakukan. Adapun kemampuan mahasiswa dalam menyusun pembuktian pada tes hasil belajar dapat dilihat pada Gambar 4.

Berdasarkan nilai yang diperoleh mahasiswa, rata-rata kemampuan mahasiswa dalam melakukan analisis pendahuluan adalah 61,35. Rata-rata kemampuan mahasiswa dalam menyusun pembuktian adalah 56,67.



Gambar 4. Bukti 1

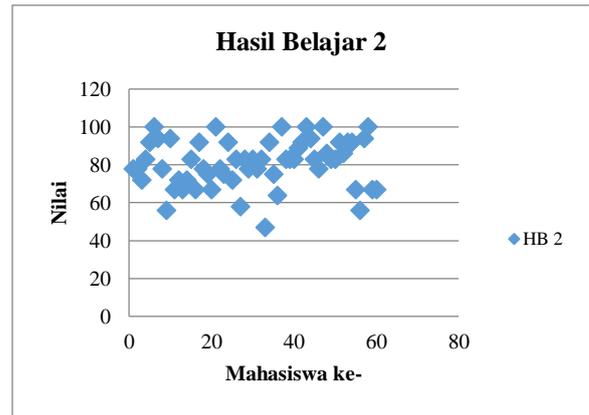
Seharusnya, apabila mahasiswa telah dapat melakukan analisis pendahuluan maka mereka dapat pula menyusun pembuktian. Hal ini berarti, mahasiswa belum mampu menyusun pembuktian dengan baik walaupun logika berpikirnya sudah mereka miliki. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Perbandingan Nilai Analisis Pendahuluan 1 dan Pembuktian 1

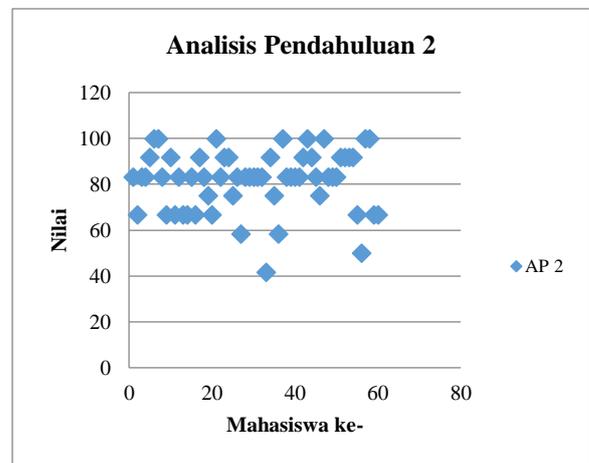
Nilai yang diperoleh mahasiswa pada tes hasil belajar kedua dapat dilihat pada Gambar 6. Hasil belajar yang dicapai oleh mahasiswa sangat memuaskan. Nilai rata-rata yang diperoleh 80,93 dengan simpangan baku 12,40. Disamping itu, 8,3% dari jumlah mahasiswa mendapat nilai kurang 65. Hal ini berarti, 8,3 % dari mahasiswa mendapat nilai C, D, dan E.

Hubungan yang telah dikemukakan pada narasi sebelumnya, hasil belajar yang dicapai oleh mahasiswa di atas dipengaruhi oleh kemampuan mereka dalam melakukan analisis pendahuluan dan menyusun pembuktian pada setiap persoalan yang diberikan.



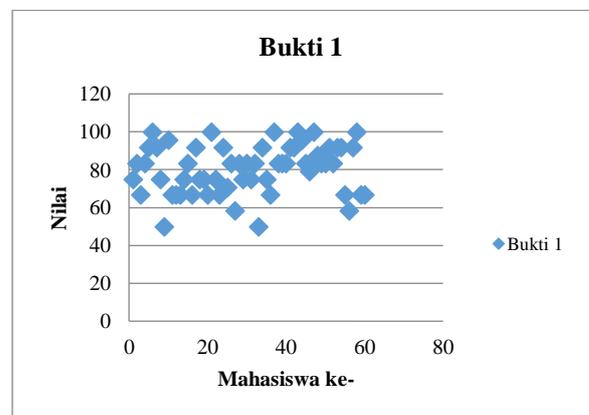
Gambar 6. Hasil Belajar 2

Kemampuan mahasiswa dalam melakukan analisis pendahuluan pada tes hasil belajar dapat dilihat pada Gambar 7.



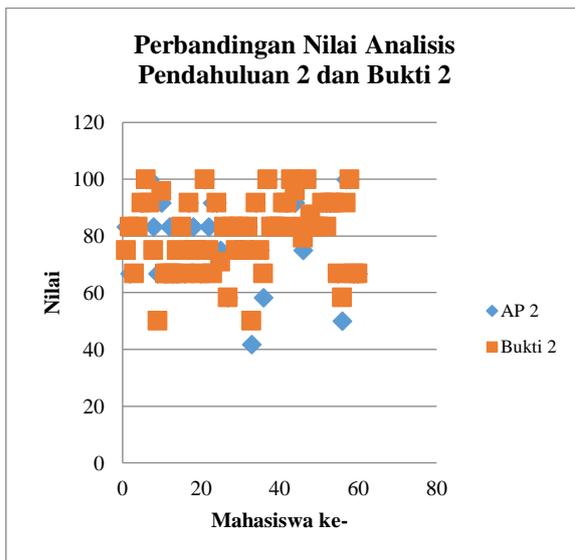
Gambar 7. Analisis Pendahuluan 2

Kemampuan mahasiswa dalam menyusun pembuktian dipengaruhi oleh analisis pendahuluan yang mereka lakukan terhadap suatu persoalan. Adapun kemampuan mahasiswa dalam menyusun pembuktian pada tes hasil belajar dapat dilihat pada Gambar 8.



Gambar 8. Bukti 2

Berdasarkan nilai yang diperoleh mahasiswa, rata-rata kemampuan mahasiswa dalam melakukan analisis pendahuluan adalah 81,81. Rata-rata kemampuan mahasiswa dalam menyusun pembuktian adalah 80,49. Hal ini berarti, mahasiswa telah mampu menyusun pembuktian dengan baik jika logika berpikirnya telah mereka miliki. Untuk lebih jelasnya, hal ini dapat dilihat pada Gambar 9.



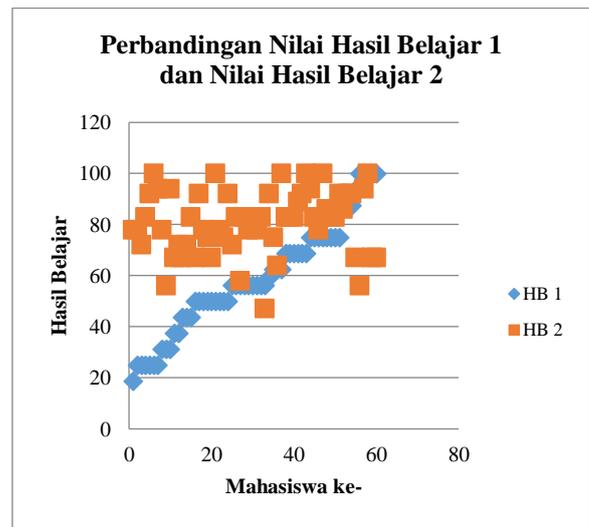
Gambar 9. Perbandingan Nilai Analisis Pendahuluan 2 dan Pembuktian 2

Jika dilihat dari rata-rata hasil belajar yang dicapai oleh mahasiswa, maka terdapat peningkatan dari nilai tes hasil belajar pertama ke nilai tes hasil belajar kedua, yaitu 59,01 menjadi 80,93. Nilai hasil belajar mahasiswa pada tes kedua lebih homogen (cukup merata/tidak terlalu bervariasi) daripada nilai tes hasil belajar pertama. Hal ini dapat dilihat dari simpangan bakunya, yaitu 21,78 pada nilai pertama dan 12,40 pada nilai kedua. Nilai minimum yang dicapai pada tes kedua lebih baik daripada tes pertama, yaitu 18,75 pada tes pertama dan 47 pada tes kedua.

Apabila dilihat dari kuarti pertama maka untuk 25% nilai terendah mahasiswa terjadi perubahan rentangan nilai, yaitu dari 18,75 - 48,44 menjadi 47 - 72. Hal ini berarti *flow proof* yang diberikan memberikan hasil yang sangat baik terhadap hasil belajar mahasiswa. Untuk lebih jelasnya, peningkatan hasil belajar setiap mahasiswa dapat dilihat pada Gambar 10.

Rata-rata kemampuan mahasiswa melakukan analisis pendahuluan dan menyusun pembuktian juga terjadi peningkatan dari tes pertama ke tes kedua. Dalam melakukan analisis pen-

dahuluan, rata-rata kemampuan mahasiswa meningkat dari 61,35 menjadi 81,81. Sedangkan dalam menyusun pembuktian, rata-rata kemampuan mahasiswa meningkat dari 56,67 menjadi 80,49. Begitu juga halnya jika dilihat dari nilai minimum yang diperoleh mahasiswa, yaitu dari 12,5 menjadi 41,7 dalam melakukan analisis pendahuluan, dan dari 0 menjadi 50 dalam menyusun pembuktian.



Gambar 10. Perbandingan Nilai Hasil Belajar 1 dan Nilai Hasil Belajar 2

Jika dilihat dari simpangan baku, kemampuan mahasiswa dalam melakukan analisis pendahuluan dan menyusun pembuktian pada tes pertama lebih homogen daripada tes pertama. Hal ini berarti, kemampuan yang dimiliki oleh mahasiswa baik dalam melakukan analisis pendahuluan maupun dalam menyusun pembuktian cukup merata pada tes kedua jika dibandingkan dengan tes pertama.

Setelah selesai pelaksanaan perkuliahan, mahasiswa diberikan angket. Pemberian angket bertujuan untuk mendapatkan informasi tentang tanggapan mahasiswa terhadap *flow proof* yang diberikan. Angket yang diberikan berupa angket terbuka, dimana mahasiswa diberikan kebebasan untuk menyampaikan tanggapannya terhadap pertanyaan yang diberikan.

Berdasarkan hasil angket yang telah diberikan, semua mahasiswa (100%) menyatakan bahwa mereka merasa mendapat bantuan dalam menyelesaikan suatu persoalan dengan adanya *flow proof*. *Flow proof* membantu mereka dalam 1) melakukan analisis pendahuluan, 2) melakukan penalaran dari suatu pembuktian, 3) menemukan langkah-langkah

pembuktian, dan 4) melatih keterurutan logika berpikir.

Flow proof yang diberikan pada analisis pendahuluan membantu mahasiswa dalam menemukan langkah-langkah pembuktian. Hal ini dirasakan oleh 98% dari jumlah mahasiswa. Disamping itu, *flow proof* yang diberikan tersebut dapat melatih keterurutan logika berpikir mahasiswa. Manfaat ini dirasakan oleh 94,4% dari jumlah mahasiswa.

Kendala yang ditemui oleh mahasiswa dalam membuat *flow proof* adalah menemukan ide, definisi, atau teorema awal yang digunakan untuk memulai pembuatan *flow proof*. Setelah ditemukan *flow proof*-nya, mereka merasa kurang percaya diri untuk menyatakan bahwa *flow proof* yang mereka dapat adalah benar. Kendala ini sangat terasa ketika mereka mengerjakan latihan/pekerjaan rumah.

Ada beberapa hal yang menjadi perhatian untuk penelitian berikutnya, yaitu masih terdapat mahasiswa 1) yang mampu melakukan analisis pendahuluan tetapi tidak mampu menyusun pembuktian, dan 2) mengalami kesalahan konsep/materi dalam melakukan analisis pendahuluan tetapi mampu menyusun pembuktian berdasarkan analisis pendahuluan tersebut. Berdasarkan angket yang diberikan, hal ini disebabkan beberapa mahasiswa ada yang terkendala dalam pemahaman, ada yang terkendala dalam melakukan analisis pendahuluan, dan ada pula yang terkendala dalam menyusun pembuktian. Jika ditinjau dari apa yang mereka peroleh pada tes kedua, kendala tersebut dapat mereka atasi melalui diskusi sesama mereka dan bertanya kepada dosen. Sehingga hasil yang mereka capai terjadi peningkatan.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa penggunaan *flow proof* pada pembelajaran Analisis Real di Program Studi Matematika, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang dapat meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam menganalisis pembuktian. Adapun kendala yang ditemui oleh mahasiswa dalam membuat *flow proof* adalah menemukan ide, definisi, atau teorema awal yang digunakan untuk memulai pembuatan *flow proof* dan rasa kurang percaya diri untuk menyatakan bahwa *flow proof* yang mereka dapat adalah benar.

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R. G. and Sherbert, D. R.. 2011. Introduction to Real Analysis Second Edition. John Wiley & Sons, Inc: Singapore.
- Cirillo, M. dan Herbst, P. G. 2011. "Moving Toward More Authentic Proof Practices in Geometry", *The Mathematics Educator*, **21**, 11-33
- Halen, Cees Van. 2007. Mind Mapping. Online Executive Education V9.3
- Helma. 2002. Penggunaan Model Pembelajaran Aktif Diiringi Dengan Pemberian Lembaran Soal Belajar Aktif (LSBA). FMIPA Universitas Negeri Padang.
- Helma & Subhan, M.. 2010. Upaya Meningkatkan Kemampuan Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Permasalahan Pada Perkuliahan Real Analysis I Dengan Penggunaan Mind Mapping dan Dipresentasikan Dalam Bahasa Inggris. FMIPA Universitas Negeri Padang.
- MathBitsNotebook. 2018. Types of Proofs-MathBitsNotebook (Geo-CCSS Math). <https://mathbitsnotebook.com>, Januari 2018
- Miyazaki, M., Fujita, T., dan Jones, K. 2015. "Flow-chart Proofs with Open Problems as Scaffolds for Learning About Geometrical Proofs". *ZDM: International Journal on Mathematics Education*, **47**, pp. 1211-1224
- Miyazaki, M., Fujita, T., Jones, K., and Iwanaga, Y. 2017. "Designing a Web-based Learning Support System for Flow-chart Proving in School Geometry". *Digit Exp Math Educ*, **3**, pp. 233-256
- Mukhni & Helma. 2008. Peningkatan Kualitas Perkuliahan Analisis Real I Melalui Implementasi Model Pembelajaran Aktif Menggunakan ALPS Berbasis Logical Mind Mapping. FMIPA Universitas Negeri Padang.
- Sukmadinata, Nana Syaodih. 2006. Metode Penelitian Pendidikan. PT Remaja Rosdakarya, Bandung
- WyZant. 2018. *Two-Column Proofs*. <http://www.wyzant.com/Help/Math/Geometry>. Diakses tanggal 20 Januari 2018